14/04/20

Το πρόβλημα της αναζήτησης αρχικής βασικής εφικτής λύσης.

Σε όλες της Simplex που έχουμε δει χρειαζόμαστε μια αρχική βασ. εφικτή λύση. Όταν ο πίνακας A περιέχει το μοναδιαίο πίνακα η αναζήτηση μιας αρ. β.ε.λ είναι εύκολη υπόθεση.
Στη γενική περίπτωση πρέπει να την δημιουργούμε και για να το πετύχουμε αυτό εισάγουμε κάποιες βοηθητικές μεταβλητές στο πρόβλημα που ονομάζονται τεχνητές μεταβλητές.
Οι μεταβλητές αυτές δεν έχουν καμία φυσική έννοια κι ο μοναδικός λόγος χρησιμοποίησής τους είναι η εμφάνιση του μοναδιαίου στον A. Το πρόβλημα σε αυτή τη περίπτωση είναι να «ξεφορτωθούμε» αυτές τις μεταβλητές και να οδηγηθούμε σε μια β.ε.λ που δεν έχει τεχνητές μεταβλητές ως βασικές

1) Ο αλγόριθμος Simplex δύο φάσεων.

Έχουμε ένα πρόβλημα σε κανονική μορφή

$$\max c^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = b$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\underline{b} \geq \underline{0}$ (Αν δεν ισχύει δηλ. υπάρχουν $b_i < 0$ τότε πολλαπλασιάζουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς με -1 και το φέρνουμε στη μορφή που θέλουμε)
Αν ο πίνακας A δεν περιέχει το μοναδιαίο πίνακα εισάγουμε το διάνυσμα των τεχνητών μεταβλητών $\underline{z} \in \mathbb{R}^m$ και χρησιμοποιούμε την Simplex για να λύσουμε το βοηθητικό πρόβλημα:

$$\min c_u^T \underline{z} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad -\max(-c_u^T \underline{z})$$
$$A\underline{x} + \underline{z} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{z} \geq \underline{0}, \quad c_u^T = [1, \dots, 1], \ c_u \in \mathbb{R}^m$$

Θέτοντας $x=0$ και $z=b$ έχουμε τη πρώτη β.ε.λ και ο αντίστοιχος βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος.

• Αν x είναι μια εφικτή λύση του αρχικού ΠΓΠ θέτοντας παράλληλα $z=0$ μας δίνει μια λύση του βοηθητικού προβλήματος με μηδενική τιμή της αντικ. συνάρτησης.

Γενικά: αν υπάρχουν εφικτές λύσεις στο αρχικό πρόβλημα το βοηθητικό καταλήγει σε βέλτιστη λύση με μηδενική τιμή της αντικ. συνάρτησης, αλλιώς το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.

• Αν στη βέλτιστη λύση του βοηθητικού η αντικ. συνάρτηση έχει τιμή μηδέν και δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές ως βασικές, τότε η βέλτιστη λύση του βοηθητικού μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρχική β.ε.λ της Simplex.

Χρησιμοποιούμε το τελικό tableau του βοηθητικού ως αρχικό tableau της Simplex χωρίς τις στήλες των τεχνητών μεταβλητών.

Οδηγώντας τις τεχνητές μεταβλητές εκτός βάσης.

Έστω ότι το αρχικό πρόβλημα έχει εφικτές λύσεις και η βέλτιστη λύση x' του βοηθητικού προβλ. είναι εκφυλισμένη. Έστω $k<m$ το πλήθος των βασικών μεταβλητών στη βέλτιστη λύση του βοηθητικού προβλήματος που δεν είναι τεχνητές μεταβλητές

Αλγόριθμος Simplex δύο φάσεων.

Φάση 1

1) Αν υπάρχουν στοιχεία του b που είναι αρνητικά πολλαπλασιάζουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς με -1 έτσι ώστε να έχουμε $b\geq 0$.

2) Εισάγουμε τεχνητές μεταβλητές $z_1 \ldots z_m$ αν είναι απαραίτητο κι εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Simplex στο βοηθητικό πρόβλημα με αντικ. συνάρτηση $-\sum_{i=1}^{m} z_i$

3) Αν το βέλτιστο κέρδος του βοηθ. προβλήματος είναι αρνητικό το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις κι ο αλγόριθμος τερματίζει.

4) Αν το βέλτιστο κέρδος του βοηθητικού προβλήματος είναι 0 έχουμε βρει μια εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος. Αν δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές στη βάση της βέλτιστης λύσης, έχουμε μια βάση του αρχικ. προβλήματος και οι τεχνητές

μεταβλητές καθώς και οι αντίστοιχες στήλες διαγράφονται από το tableau

5) Αν η l-οστή βασική μεταβλητή είναι τεχνητή, εξετάζουμε το l-οστό στοιχείο των στηλών $B'A_j$, $j=1,\dots,n$. Αν όλα αυτά τα στοιχεία είναι μηδέν η l-οστή γραμμή αντιστοιχεί σε ένα πλεονάστικο περιορισμό και διαγράφεται από το tableau.

Διαφορετικά αν το j-οστό στοιχείο της l-οστής γραμμής είναι διάφορο του μηδενός αλλάζουμε βάση (χρησιμοποιώντας αυτό το στοιχείο ως πιλότο) εξάγοντας από τη βάση την l-οστή βασ. μεταβλητή κι εισάγοντας τη μεταβλητή x_j. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να εξάγουμε από τη βάση όλες τις τεχνητές μεταβλητές

Φάση 2

1) Χρησιμοποιούμε τη τελική βάση και το tableau της φάσης 1 ως την αρχική βάση και το αρχικό tableau της φάσης 2

2) Αλλάζουμε τους συντελεστές κόστους της αντικ. συνάρτησης επαναφέροντας τις τιμές του αρχικού προβλήματος. Με βάση αυτούς τους συντελεστές κέρδους επανεκτιμούμε τα στοιχεία της μηδενικής γραμμής, δηλαδή υπολογίζουμε τη νέα τιμή της αντικ. συνάρτησης και τις νέες μοναδιαίες αυξήσεις κέρδους.

3) Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Simplex στο αρχικό πρόβλημα

Ο αλγόριθμος των 2 φάσεων είναι ένας πλήρης αλγόριθμος με την έννοια ότι αντιμετωπίζει όλα τα ενδεχόμενα:

α) Αν το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις αυτό ανιχνεύεται στο τέλος της φάσης I

β) Αν το πρόβλημα έχει λύσεις αλλά υπάρχουν πλεονάστικοί περιορισμοί, αυτό γίνεται αντιληπτό και διορθώνεται με την διαγραφή των αντίστοιχων γραμμών στο tableau στο τέλος της φάσης I

γ) Αν το βέλτιστο κέρδος δεν είναι φραγμένο και είναι ίσο με $+\infty$, αυτό γίνεται αντιληπτό στη φάση II

δ) Διαφορετικά η φάση II τερματίζει με την εκτίμηση της βέλτιστης λύσης.

Παράδειγμα 3.8

$$Z = -\max(-x_1 - x_2 - x_3)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2$$

$$4x_2 + 9x_3 = 5$$

$$3x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex δύο φάσεων

Λύση

Βλέπουμε ότι ο πίνακας A δεν περιέχει το μοναδιαίο πίνακα, έτσι χρησιμοποιούμε τη μέθοδο δύο φάσεων για να λύσουμε το πρόβλημα. Για να βρούμε μια αρχική β.ε.λ εισάγουμε 3 τεχνητές μεταβλητές και έχουμε το ακόλουθο βοηθητικό πρόβλημα:

$$Z = -\max(-x_5 - x_6 - x_7)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2$$

$$4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5$$

$$3x_3 + x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, .., 7$$

Αν θέσουμε $[x_5, x_6, x_7, x_4] = b^T = [3, 2, 5, 1]$ έχουμε μια β.ε.λ του βοηθητικού προβλήματος. Και τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με μηδέν.

Ο αντίστοιχος βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος και ο $c_B^T = [-1, -1, -1, 0]$

			0	0	0	0	-1	-1	-1	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	-1	3	1	2	3	0	1	0	0	1
A_6	-1	2	-1	2	6	0	0	1	0	2/6
A_7	-1	5	0	4	9	0	0	0	1	5/9
A_4	0	1	0	0	3	1	0	0	0	1/3
		10	0	8	18	0	0	0	0	

Υπάρχει ισοπαλία στο κριτήριο εξόδου. Άρα θα έχουμε εκφυλισμένη λύση στο επόμενο tableau.

Για αυτό χρησιμοποιούμε τον κανόνα οδήγησης του Bland. Σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα οδήγησης επιλέγουμε το μικρότερο j για το οποίο $\bar{c}_j > 0$ και εισάγουμε την στήλη A_j στη βάση.

<u>Δηλαδή</u> $j=2$, $\bar{c}_j = 8 > 0$ και το μικρότερο άρα:

	c_B	x_B	A_1 (0)	A_2 (0)	A_3 (0)	A_4 (0)	A_5 (-1)	A_6 (-1)	A_7 (-1)	θ
A_5	-1	3	1	2	3	0	1	0	0	3/2
A_6	-1	2	-1	$\boxed{2}$	6	0	0	1	0	2/2
A_7	-1	5	0	4	9	0	0	0	1	5/4
A_4	0	1	0	0	3	1	0	0	0	–
		10	0	8	13	0	0	0	0	

Εξέρχεται η A_6

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ	
A_5	-1	1	$\boxed{2}$	0	-3	0	1	-1	0	1/2	$\Gamma_1 \sim \Gamma_1 - 2\Gamma_2'$
A_2	0	1	-1/2	1	3	0	0	1/2	0	–	Γ_2'
A_7	-1	1	2	0	-3	0	0	-2	1	1/2	$\Gamma_3 \sim \Gamma_3 - 4\Gamma_2'$
A_4	0	1	0	0	3	1	0	0	0	–	$\Gamma_4 \sim \Gamma_4$
		2	4	0	-6	0	0	-4	0		

κανόνας μικρότερου δείκτη

$(-1)\cdot[(-1)\cdot 1 + 0 + (-1)\cdot 1 + 0] = 2$

	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_1	0	1/2	1	0	-3/2	0	1/2	-1/2	0	–
A_2	0	5/4	0	1	9/4	0	1/4	1/4	0	5/9
A_7	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	1	–
A_4	0	1	0	0	$\boxed{3}$	1	0	0	0	1/3
		0	0	0	0	0	-2	-2	0	

Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας <u>αλλά</u> υπάρχει μία μη βασική μεταβλητή η x_3 με [illegible] [illegible] κέρδος μηδενικό πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε άπειρες βέλτιστες λύσεις κι ότι αν εισάγουμε την βάση x_3 η λύση θα είναι επίσης βέλτιστη. (Εξάγουμε την x_4 δηλαδή είτε έχω την A_3 είτε A_4 είναι το ίδιο)

	C_B	X_B	A_1 (0)	A_2 (0)	A_3 (0)	A_4 (0)	A_5 (-1)	A_6 (-1)	A_7 (-1)	θ
A_1	0	1	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	
A_2	0	1/2	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	
A_7	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	1	
A_3	0	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	
		0	0	0	0	0	-2	-2	0	

Στα 2 τελευταία tableau που αντιστοιχούν σε βέλτιστες λύσεις του βοηθ. προβλήματος η τιμή της αντικ. συνάρτησης είναι μηδέν που σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημα έχει λύση.
Δυστυχώς και στα 2 tableau μεταξύ των βασικών μεταβλητών υπάρχει η x_7, που είναι τεχνητή μεταβλητή αλλά είναι ίση με 0.
Πρέπει να την βγάλουμε από τη βάση πριν πάμε στην επόμενη φάση.
Η x_7 είναι η τρίτη βασ. μεταβλητή και όλα τα στοιχεία της τρίτης γραμμής που αντιστοιχούν σε πραγμ. μεταβλητές, δηλ. τα 4 πρώτα είναι μηδέν.
Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές του πίνακα Α δεν είναι γρ. ανεξάρτητες κι άρα υπάρχουν πλεονάζοντες περιορισμοί.
Όντως ο τρίτος περιορισμός του αρχ. προβλήματος είναι ίσος με το άθροισμα των δύο πρώτων.
Διαγράφουμε λοιπόν την γραμμή που αντιστοιχεί στη x_7 κι οδηγούμαστε στο επόμενο tableau που είναι το αρχικό της $2^{ης}$ φάσης.

	C_B	X_B	A_1 (-1)	A_2 (-1)	A_3 (-1)	A_4 (0)	θ
A_1	-1	1	1	0	0	1/2	2
A_2	-1	1/2	0	1	0	-3/4	–
A_3	-1	1/3	0	0	1	$\boxed{1/3}$	1
		11/6	0	0	0	1/12	

$c_4 = \frac{1}{12} > 0$ άρα η λύση δεν είναι βέλτιστη. Εισάγουμε τη x_4 και εξάγουμε τη x_3

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	θ
A_1	-1	1/2	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	2
A_2	-1	5/4	0	1	$\frac{9}{4}$	0	–
A_4	0	1	0	0	3	1	1
		7/4	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	

Ικανοποιεί το κριτήριο βελτιστότητας.
Η βέλτιστη λύση είναι: $x^{*T} = [\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1]$

Η μέθοδος του μεγάλου M

Είναι μια εναλλακτική μέθοδος εύρεσης αρχικής β.ε.λ. Η μέθοδος αυτή συνδιάζει τις δυο φάσεις της προηγ. μεθόδου σε μία. Πάλι εισάγουμε τεχνητές μεταβλητές όπως δεν χρησιμοποιούμε βοηθ. προβλήματα για τις εξάγουμε από τη βάση.

Χρησιμοποιούμε ως αντικ. συνάρτηση την $c^T x + M c_a^T z$, όπου $c_a^T = [1 \dots 1]$ $c_a \in R^m$, z το σύνολο των τεχνητών μεταβλητών και M μια πολύ μεγάλη αρνητική σταθερά. Επειδή το M αρκετά μεγάλο (υποθέτουμε $M = -\infty$). Αν το αρχικό πρόβλημα έχει εφικτές λύσεις και το βέλτιστο κέρδος πεπερασμένο όλες οι τεχ. μεταβλητές μηδενίζονται και σύγκλιση στο αρχ. πρόβλημα.

• Αν στη βέλτιστη λύση υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές μη μηδενικές τότε το αρχ. ~~πρόβλημα~~ Π.Γ.Π. δεν έχει εφικτές λύσεις και δεν υπάρχει λόγος να ορίσουμε μια τιμή συγκεκριμένη του M στο tableau. Το δηλώνουμε ως μια μεταβλητή η οποία πάντοτε είναι μικρότερη από κάθε άλλη ποσότητα με την οποία συγκρίνεται.

Παράδειγμα 3.9

Έχουμε το ίδιο ΠΓΠ με πριν.

$$z = -\max(-x_1 - x_2 - x_3)$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\
-x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\
4x_2 + 9x_3 &= 5 \\
3x_3 + x_4 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Βρείτε τη βέλτιστη λύση με τη μέθοδο του μεγάλου M.

Λύση: Εισάγουμε 3 νέες τεχνητές μεταβλητές και έχουμε το ακόλουθο προβλ

$$z = -\max(-x_1 - x_2 - x_3 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 6x_3 \qquad + x_6 \qquad = 2$$

$$4x_2 + 9x_3 \qquad + x_7 = 5$$

$$3x_3 + x_4 \qquad = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1 \ldots 7$$

Έχουμε μια β.ε.λ αν θέσουμε $[x_5\ x_6\ x_7,\ x_4]^T = b^T = [3, 2, 5, 1]$ και τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με 0.

Ο αντίστοιχος βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος $c_B^T = [M, M, M, 0]$

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	M	3	1	2	3	0	1	0	0	1
A_6	M	2	-1	2	6	0	0	1	0	1/3
A_7	M	5	0	4	9	0	0	0	1	5/9
A_4	0	1	0	0	$\boxed{3}$	1	0	0	0	1/3
		-10M	-1	-1-8M	-1-13M	0	0	0	0	

			-1							
	c_B	x_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	M	2	1	2	0	-1	1	0	0	
A_6	M	0	-1	2	0	-2	0	1	0	
A_7	M	2	0	4	0	-3	0	0	1	
A_3	-1	1/3	0	0	1	-1/3	0	0	0	
		$\frac{1}{3} - 4M$	-1	-8M-1	0	6M-1/3	0	0	0	

Χρησιμοποιούμε την αποτελεσματική μέθοδο διαταραχής του Charnes σύμφωνα με το οποίο αντικαθιστούμε το μηδέν της βασ. μεταβλητής με ένα αυθαίρετο μικρό ε και συνεχίζουμε κανονικά μέχρι να φθάσουμε στο τελικό tableau οπότε θέτουμε ε=0

Έτσι έχουμε:

	C_B	X_B	A_1 (-1)	A_2 (-1)	A_3 (-1)	A_4 (0)	A_5 (M)	A_6	A_7	θ
A_5	M	2	1	2	0	-1	1	0	0	1
A_6	M	ε	-1	$\boxed{2}$	0	-2	0	1	0	$\varepsilon/2$
A_7	M	2	0	4	0	-3	0	0	1	2
A_3	-1	1/3	0	0	1	-1/3	0	0	0	-
		$1/3-(4+\varepsilon)M$	-1	$-3M-1$	0	$6M-1/3$	0	0	0	

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	M	$2-\varepsilon$	2	0	0	1	1	-1	0	$1-\varepsilon/2$
A_2	-1	$\varepsilon/2$	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0	—
A_7	M	$2-2\varepsilon$	$\boxed{2}$	0	0	1	0	-2	1	$1-\varepsilon$
A_3	-1	1/3	0	0	1	1/3	0	0	0	—
		$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{3}-(4-3\varepsilon)M$	$-4M-\frac{3}{2}$	0	0	$-2M-\frac{2}{3}$	0	$4M+\frac{1}{2}$	0	

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	M	ε	0	0	0	0	1	1	-1	-
A_2	-1	1/2	0	1	0	-3/4	0	0	1/4	—
A_1	-1	$1-\varepsilon$	1	0	0	1/2	0	-1	1/2	$2-2\varepsilon$
A_3	-1	1/3	0	0	1	$\boxed{1/3}$	0	0	0	1
		$11/6-\varepsilon$	0	0	0	19/12	0	-1	-1/4	

	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	M	ε	0	0	0	0	1	1	-1	
A_2	-1	5/4	0	1	9/4	0	0	0	1/4	
A_1	-1	$1/2-\varepsilon$	1	0	-3/2	0	0	-1	1/2	
A_4	0	1	0	0	3	1	0	0	0	
		$\frac{7}{4}-\varepsilon-\varepsilon M$	0	0	-1/4	0	0	-1	$2M+3/4$	

Τωρα ολα τα στοιχεια της μηδενικης γραμμης ειναι μικροτερα ή ισα του μηδενος οποτε εχουμε βελτιστη λυση.

Θετουμε $\varepsilon=0$ και εχουμε:

			-1	-1	-1	0	M	M	M	
	C_B	X_B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
A_5	M	0	0	0	0	0	1	1	-1	
A_2	-1	$5/4$	0	1	$9/4$	0	0	0	$1/4$	
A_1	-1	$1/2$	1	0	$-3/2$	0	0	-1	$1/2$	
A_4	0	1	0	0	3	1	0	0	0	
		$7/4$	0	0	$-1/4$	0	0	-1	$2M+3/4$	

Η βέλτιστη λύση είναι $\underline{x}^T = [1/2, 5/4, 0, 1]$